

12. Elektrotechnika 1

Stejnoseměrné obvody

Kirchhoffovy zákony

12. Elektrotechnika 1 – Kirchhoffovy zákony

Při řešení elektrických obvodů, tedy různě propojených sítí tvořených zdroji, odpory (kapacitami a indukčnostmi) se opíráme o dva základní fyzikální zákony, **Kirchhoffovy zákony**.

a) Proudový Kirchhoffův zákon (1.zákon) říká, že algebraický součet proudů ve větvích spojených v libovolném uzlu je roven nule.

Jinými slovy: **součet proudů do uzlu přitékajících je roven součtu proudů z uzlu odtékajících**. Vžila se dohoda, že proudy tekoucí z uzlu se označují kladným znaménkem, proudy tekoucí do uzlu záporným znaménkem.

b) Napět'ový Kirchhoffův zákon (2.zákon) říká, že algebraický součet napětí ve větvích tvořících libovolnou smyčku je roven nule. Znaménka napětí orientovaných souhlasně se smyčkou se berou kladně, opačně orientovaná napětí se berou se záporným znaménkem. Pojmy smyčka a uzel budou zřejmé z následujícího obrázku.

12. Elektroetchnika1 – Kirchhoffovy zákony 2

Obvod na obrázku má dvě smyčky (označené I a II) a jeden uzel. **Pro smyčku I platí** podle Kirchhoffova zákona pro napětí ve smyčce I :

$$- U_1 + R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1 + U_2 + R_3 \cdot I_3 + U_3 = 0$$

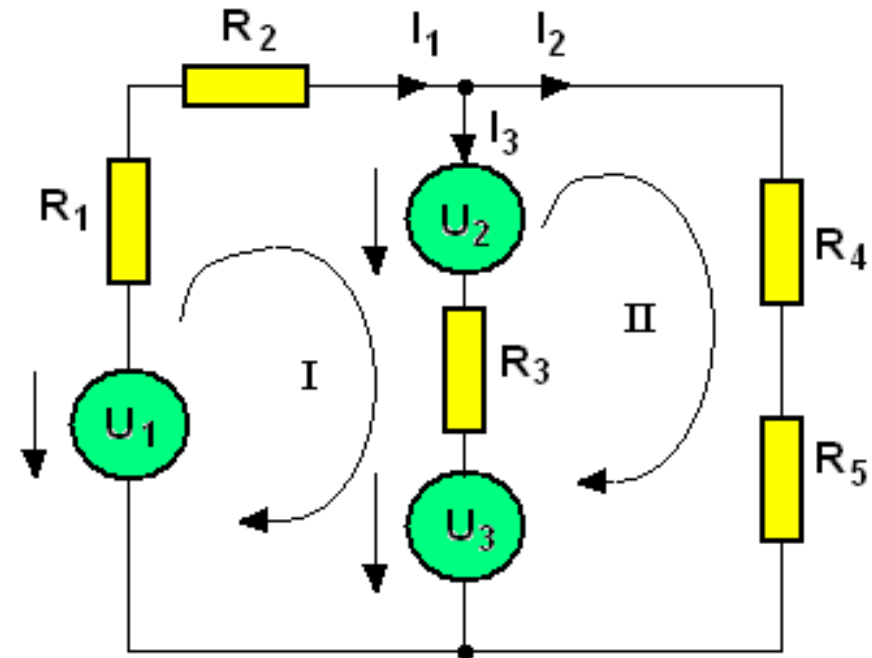
Pro napětí ve smyčce II dostaneme rovnici :

$$- U_2 - R_3 \cdot I_3 - U_3 + R_5 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_2 = 0$$

Pro proudový uzel platí :

$$I_2 + I_3 - I_1 = 0$$

Známe-li některé obvodové veličiny, můžeme pomocí Kirchhoffových zákonů vypočítat ostatní.



Konvence značení napětí a proudů !

12. Elektrotechnika 1 – Kirchhoffovy zákony 3

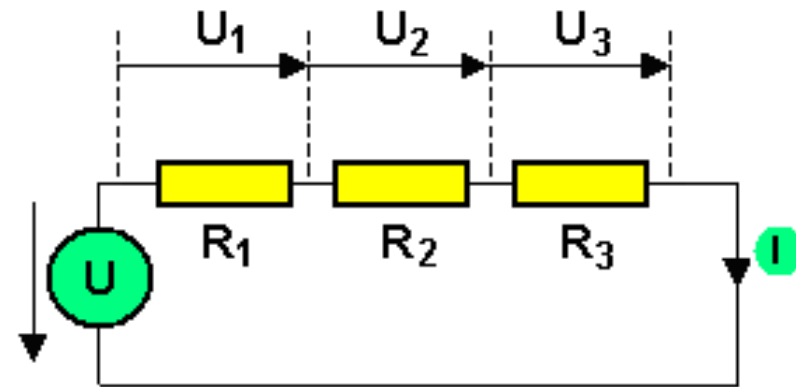
Ukažme si použití Kirchhoffových zákonů na příkladu **sériového a paralelního řazení odporů**. Sériově řazené odpory jsou zapojeny podle obrázku:

Všemi odpory protéká stejný proud I a bude tedy platit:

$$U = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I + R_3 \cdot I \quad \text{a tedy}$$

$$U/I = R = R_1 + R_2 + R_3$$

Tedy **celkový odpor několika sériově řazených odporů je roven součtu jejich hodnot.**



Zapojíme-li odpory paralelně dostaneme uspořádání podle dalšího obrázku:

12. Elektrotechnika 1 – Kirchhoffovy zákony 4

Pro **proudový uzel** platí podle Kirchhoffova zákona:

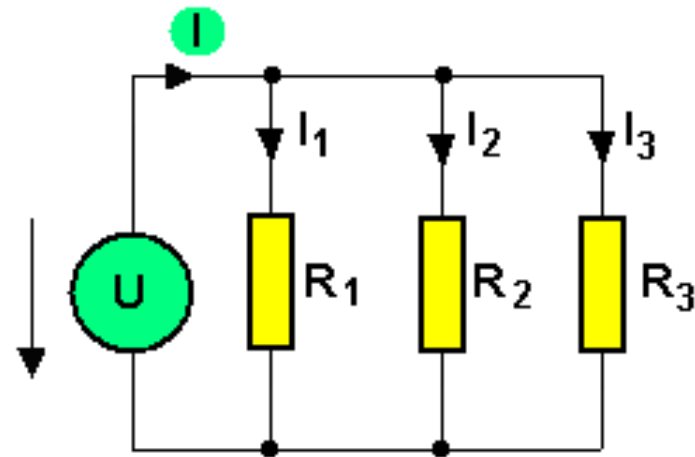
$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

Na všech paralelně zapojených odporech je stejné napětí U a pro jednotlivé proudy dostaneme:

$$I_1 = U / R_1, \quad I_2 = U / R_2, \quad I_3 = U / R_3$$

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Tedy **při paralelním řazení odporů** se sčítají jejich převrácené hodnoty, nebo jinak řečeno **sčítají se jejich vodivosti**.



a odtud

12. Elektrotechnika 1 – Kirchhoffovy zákony 5

Je užitečné si pamatovat , že výsledný odpor dvou paralelně řazených odporů je dán vztahem:

$$R = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

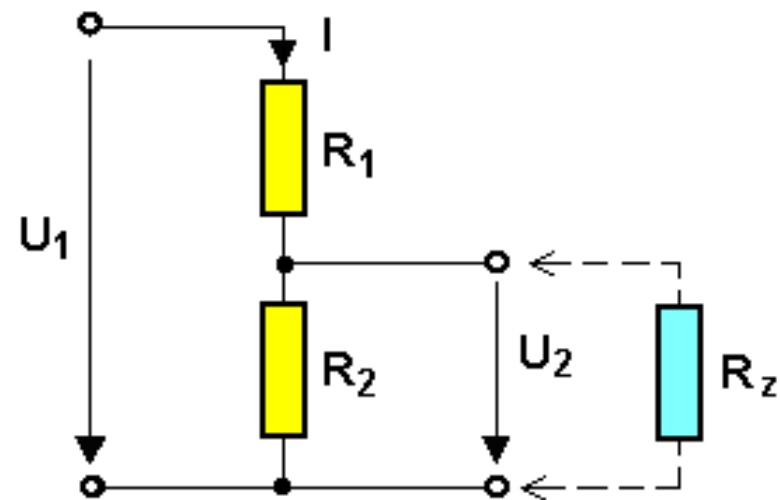
Jedním z nejdůležitějších stejnosměrných obvodů je **odporový dělič**, který slouží pro získání menšího napětí U_2 z vyššího napětí U_1 .

Pro proud protékající celým děličem platí

$$I = U_1 / (R_1 + R_2)$$

Napětí na odbočce děliče $U_2 = R_2 \cdot I$,
tedy pro U_2 dostaneme výsledný vztah

$$U_2 = U_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$



12. Elektrotechnika 1 – Kirchhoffovy zákony 6

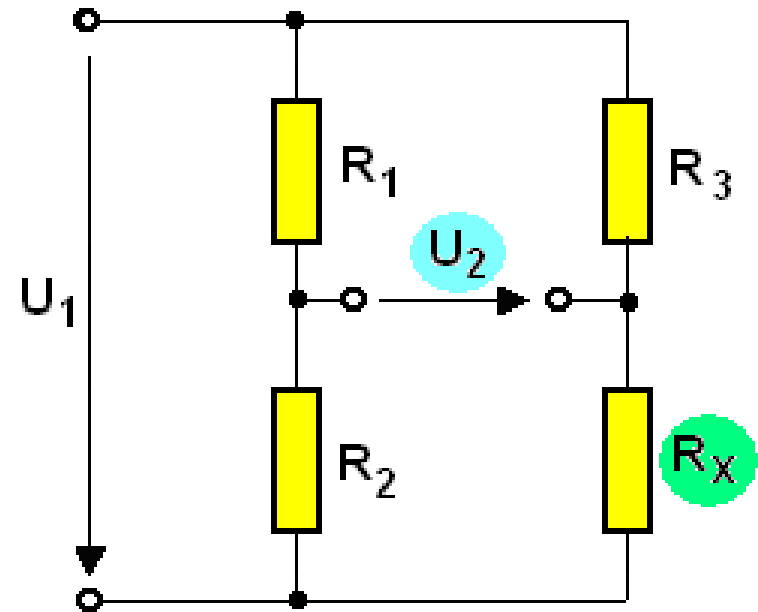
Pokud by dělič nebyl naprázdno, ale byl zatížen nějakým zatěžovacím odporem R_z , museli bychom místo samotného R_2 počítat s paralelní kombinací $R_2 \parallel R_z$, kde R_z je odpor zatěžovací a symbolem \parallel označujeme paralelní kombinaci.

Nižší napětí u zatíženého akumulátoru je způsobeno vlastně tím, že výstupní napětí je napětí na odbočce děliče tvořeného vnitřním odporem akumulátoru a odporu zatěžovacího.

Zapojíme-li **dva děliče proti sobě** dostaneme velmi užitečné zapojení, které slouží k měření odporů a v mírně pozměněné podobě obecně k měření impedancí, které se označuje **jako Wheatstoneův můstek**. Toto můstkové zapojení je znázorněno na dalším obrázku.

12. Elektrotechnika 1 – Wheatstoneův můstek

Pro přibližné **měření odporu** se používá nejčastěji Ohmova metoda. To znamená změříme proud protékající odporem a napětí na odporu a z toho podle Ohmova zákona vypočítáme odpor. **Pro přesné měření odporu** a pro případy, kdy je obtížné použít Ohmovu metodu (např. při měření velmi malých či velmi vysokých odporů **používáme právě můstkové metody**).



Existuje velké **množství různých modifikací Wheatstoneova můstku** pro měření nejrůznějších elektrických veličin. Základní princip je ale všude stejný. Odpor R_x v obrázku je neznámý odpor, který chceme změřit. Odpor R_3 bývá odpor jehož hodnotu známe s velkou přesností tzv. normál. Odpory R_1 a R_2 jsou tvořeny kalibrovaným děličem či dvěma dekádami, prepínatelnými sadami velmi přesných odporů.

12. Elektrotechnika 1- Wheatstoneův můstek 2

Měření provádíme tak, že měníme kombinaci odporů R_1 a R_2 tak dlouho, až napětí U_2 v diagonále můstku je rovno nule. V tom případě jsou dělicí poměry obou děličů stejné a platí tedy:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x} \longrightarrow R_x = \frac{R_1}{R_2} R_3$$

V diagonále můstku nepotřebujeme žádné příliš přesné měřidlo, stačí pouhá indikace minimálního napětí (např. v mV).

12. Elektrotechnika – Příklad 1 – Kirch.z.

Příklad 1 na Kirchhoffovy zákony:

1. Kirch. z.

$$\sum I_i = 0,$$

tedy součet proudů vstupujících do plochy S a vystupujících z plochy S je roven 0 :

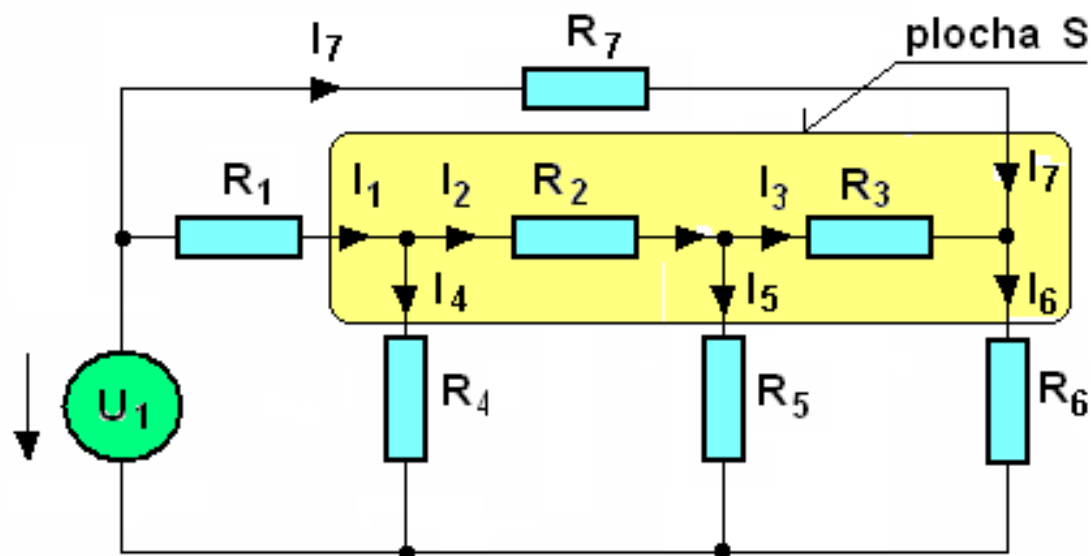
$$-I_1 - I_7 + I_4 + I_5 + I_6 = 0$$

Ale též to platí o jednotlivých uzlech :

$$-I_1 + I_2 + I_4 = 0$$

$$-I_2 + I_3 + I_5 = 0$$

$$-I_3 + I_6 - I_7 = 0$$



12. Elektrotechnika 1 – Příklad 1 – Kirch.z.

2. Kirch. z.

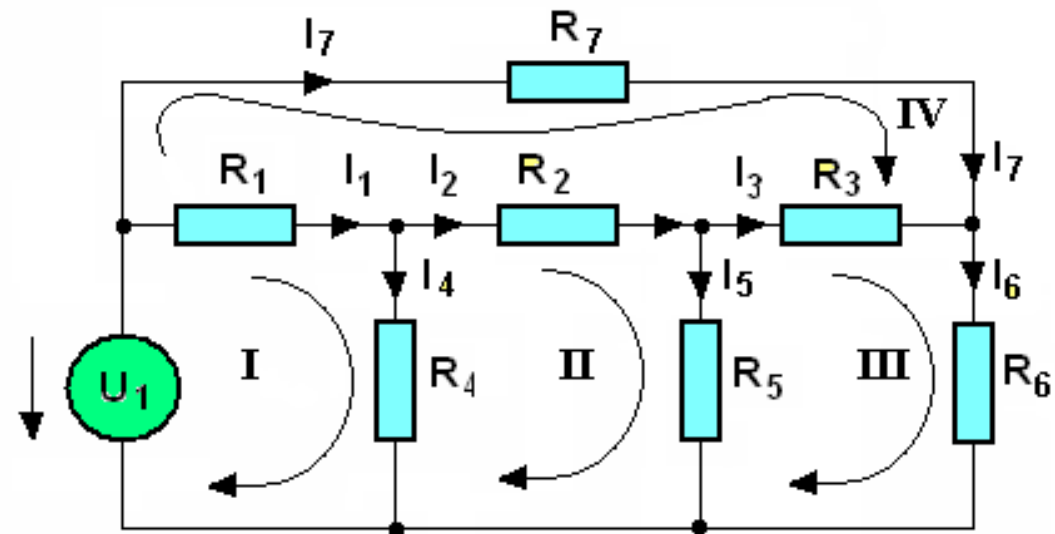
součet napětí ve smyčkách je roven 0.

$$- U_1 + R_1 I_1 + R_4 I_4 = 0$$

$$- R_4 I_4 + R_2 I_2 + R_5 I_5 = 0$$

$$- R_5 I_5 + R_3 I_3 + R_6 I_6 = 0$$

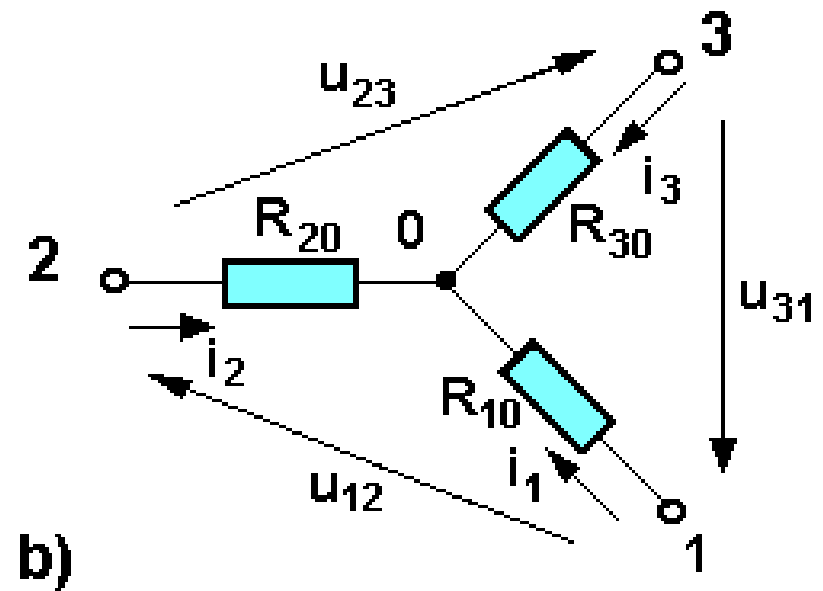
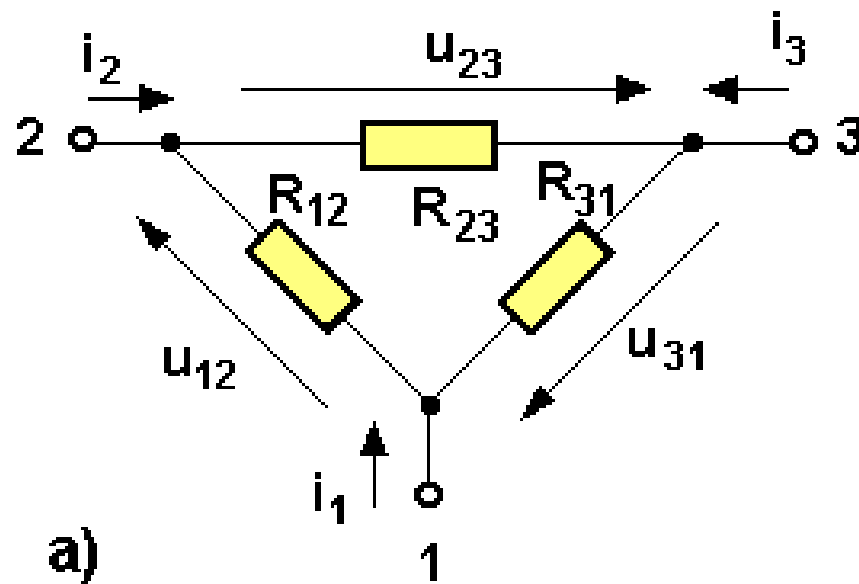
$$- R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_7 I_7 = 0$$



12. Elektrotechnika 1 – ekvivalence trojúh. - hvězda

Pro řadu situací se hodí využít pravidla ekvivalence zapojení rezistorů (impedancí) do trojúhelníka (Δ) a do hvězdy (Y).

Této ekvivalenci se říká transfigurace trojúhelník – hvězda.



12. Elektrotechnika 1 – ekvivalence trojúh. - hvězda

Obě **zapojení budou ekvivalentní** právě tehdy, když pro libovolnou kombinaci proudů i_1 , i_2 a i_3 vstupujících do daného zapojení z vnějších obvodů **budou napětí** mezi stejnohlými uzly 1, 2, 3 **stejná** (proud vstupující z vnějších obvodů do uzlu 0 musí být samozřejmě nulový, tj. uzel 0 zůstává nepřípojen).

Naopak při napájení obvodu ze zdrojů napětí u_{12} , u_{23} a u_{31} musí být i proudy i_1 , i_2 , i_3 vstupující do obou obvodů navzájem shodné.

Mají-li být obě zapojení ekvivalentní pro libovolné vstupní proudy, pak musí platit ekvivalence v případě, že jeden z proudů je nulový (např. i_3), tj. v případě, že svorka 3 je od vnějších obvodů odpojena.

Z rovnosti odporů mezi uzly 1 – 2 pro obě zapojení plyne

$$\frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{10} + R_{20}$$

12. Elektrotechnika 1- ekvivalence trojúh. - hvězda

Obdobně můžeme napsat rovnost odporů mezi uzly 2 - 3

$$\frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{20} + R_{30}$$

A taktéž bude platit pro uzly 3 - 1

$$\frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{30} + R_{10}$$

Odečteme-li od první rovnice rovnici druhou a dále pak přičteme rovnici třetí, vyruší se nám rezistory R_{20} a R_{30} a úpravou dostaneme

$$\frac{2 R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = 2 R_{10} \qquad \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{10}$$

12. Elektrotechnika 1 – ekvivalence trojúh. - hvězda

Obdobně můžeme získat vztahy pro R_{20} a R_{30}

$$\frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{20}$$

$$\frac{R_{23} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} = R_{30}$$

Pro odvození vztahů ekvivalence **hvězda – trojúhelník** je nutné předpokládat, že některá z napětí u_{12} , u_{23} nebo u_{31} bude nulové (tj. příslušné uzly jsou zkratované). Vodivost mezi zbylým uzlem a zkratovanou dvojicí uzlů lze pak vyjádřit pomocí vodivostí příslušných kombinací. Předpokládáme-li, že jsou zkratovány např. uzly 2 a 3, pak lze vodivost mezi uzlem 1 a spojenými uzly 2 a 3 zapsat jako

12. Elektrotechnika 1 – ekvivalence hvězda – trojúh.

$$\frac{G_{10} (G_{20} + G_{30})}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} = G_{12} + G_{31}$$

Obdobně získáme vztah pro vodivosti mezi uzlem 2 a zkratovanými uzly 1 a 3

$$\frac{G_{20} (G_{10} + G_{30})}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} = G_{23} + G_{12}$$

A podobně pro vodivosti mezi uzlem 3 a zkratovanými uzly 1 a 2

$$\frac{G_{30} (G_{10} + G_{20})}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} = G_{31} + G_{23}$$

12. Elektrotechnika 1 – ekvivalence hvězda – trojúh.

Podobně jako v předchozí ekvivalenci, tak i nyní můžeme provést sečtení první a druhé rovnice a pak odečíst třetí rovnici a dostaneme následující vztahy pro G_{12}

$$G_{12} = \frac{G_{10} G_{20}}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} \quad \frac{1}{G_{12}} = R_{12} = R_{10} + R_{20} + \frac{R_{10} R_{20}}{R_{30}}$$

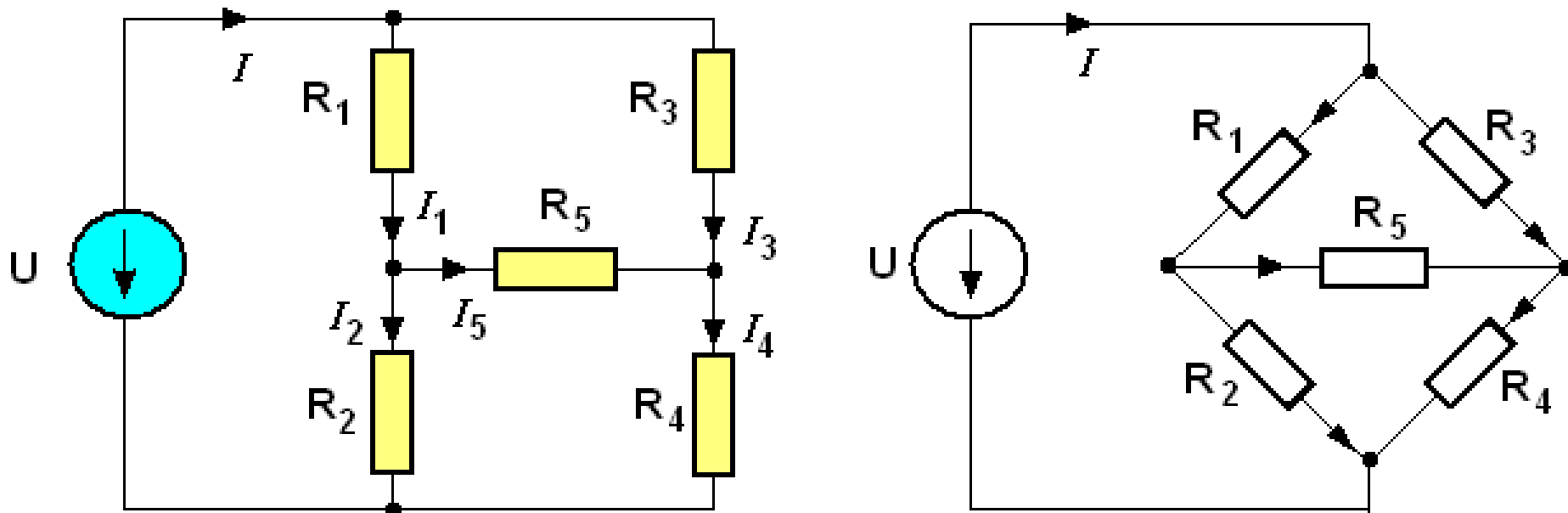
Dále pak podobně pro obdržíme vztahy pro G_{23} a G_{31}

$$G_{23} = \frac{G_{20} G_{30}}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} \quad \frac{1}{G_{23}} = R_{23} = R_{20} + R_{30} + \frac{R_{20} R_{30}}{R_{10}}$$

$$G_{31} = \frac{G_{10} G_{30}}{G_{10} + G_{20} + G_{30}} \quad \frac{1}{G_{31}} = R_{31} = R_{10} + R_{30} + \frac{R_{10} R_{30}}{R_{20}}$$

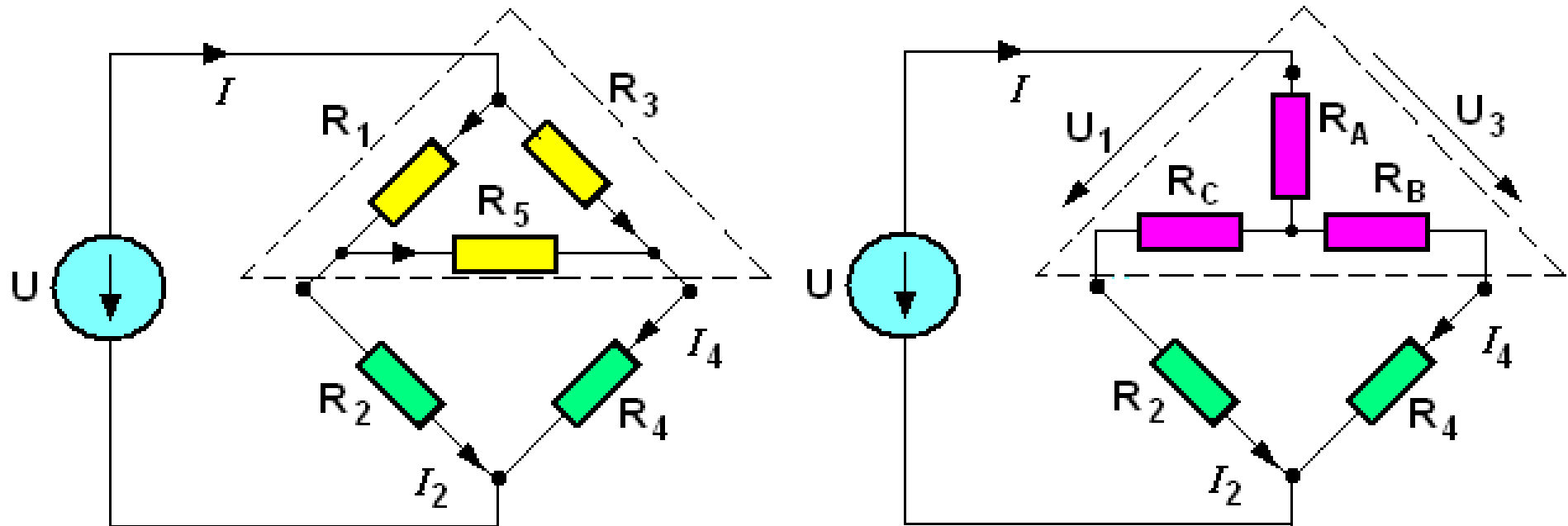
12. Elektrotechnika 1 – příklad na transfiguraci Δ Y

Příklad zatíženého Wheastonova můstku



Úkolem je zjistit obecně napětí a proudy na všech prvcích obvodu – můstku. Použijeme vlastní můstek s pootočenými větvemi, což se nám bude lépe hodit pro transfiguraci Δ na Y.

12. Elektrotechnika 1 – příklad na transfiguraci



Po transfiguraci Δ na Y bude platit pro ekvivalentní odpory :

$$R_A = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3 + R_5} \quad R_B = \frac{R_3 R_5}{R_1 + R_3 + R_5} \quad R_C = \frac{R_1 R_5}{R_1 + R_3 + R_5}$$

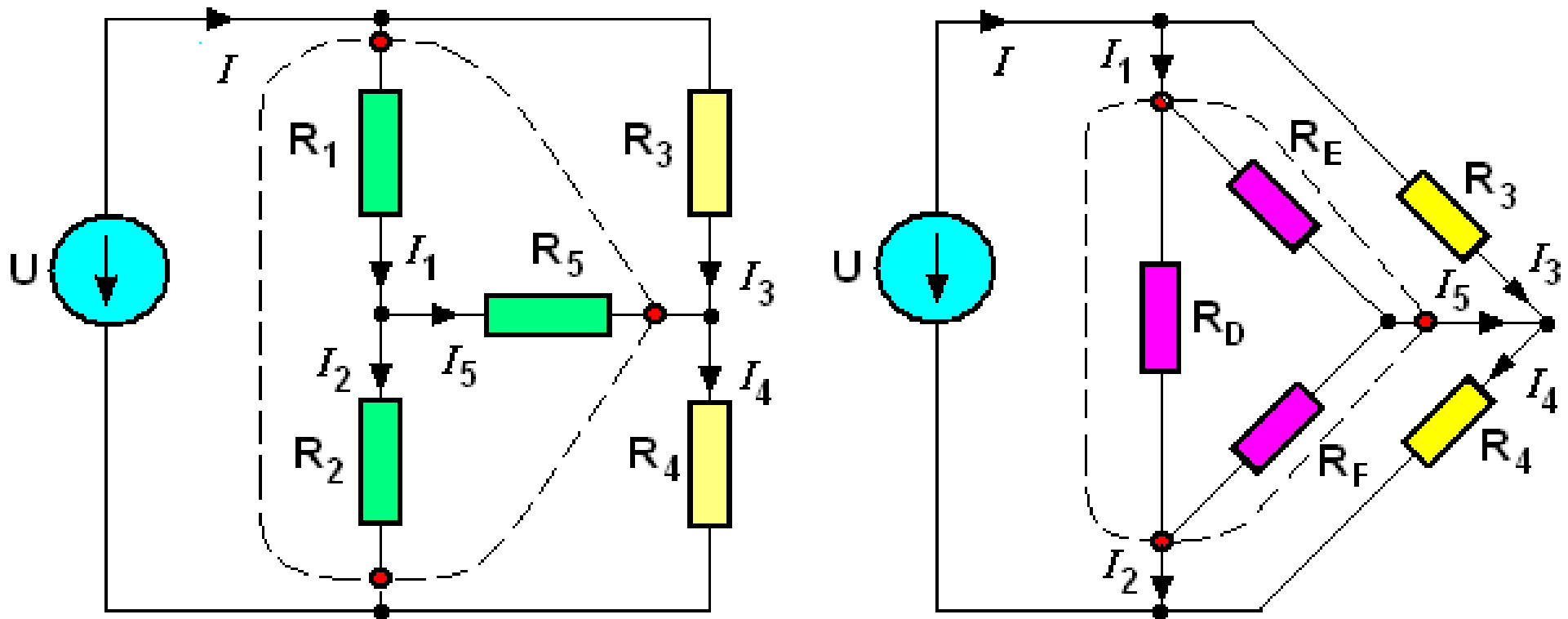
12. Elektrotechnika 1 – příklad na transfiguraci

Dále lze pokračovat v tomto zjednodušeném schématu za pomoci pravidel o sériovém a paralelním řazení prvků:

- a) Předně rezistory R_C a R_2 , jakož i rezistory R_B a R_4 tvoří sériovou kombinaci a lze je jednoduše sečíst. Ve zjednodušeném zapojení je možné stanovit jen některé napětí a proudy – tedy ne všechny. V této situaci je možné vypočítat celkový proud I a proudy tekoucí rezistory R_2 a R_4 – zůstaly zachovány z původního schématu.
- b) Pomocí 2. Kirchhoffova zákona pak je možné vyjádřit napětí na rezistorech R_1 , R_3 a R_5 a to z napětí na rezistorech R_A , R_B a R_C . To znamená, že v obvodu po transfiguraci počítáme napětí mezi body, mezi kterými jsou v původním obvodu zapojeny rezistory R_1 , R_3 a R_5 . proudy v rezistorech R_1 , R_3 a R_5 poté můžeme vypočítat pomocí Ohmova zákona.

12. Elektrotechnika 1 – příklad na transfiguraci 2

Je také možné použít opačnou transfiguraci $Y - \Delta$. Zapojení do Y může tvořit trojice rezistorů R_1, R_2 a R_5 nebo R_3, R_4 a R_5 .
Použijme prvou trojici., kterou můžeme nahradit ekvivalentním zapojením do trojúhelníka, tvořeným rezistory R_D, R_E a R_F .



12. Elektrotechnika 1 – příklad na transfiguraci 2

Pro odpory rezistorů ekvivalentního zapojení do trojúhelníka platí

$$R_D = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_5}$$

$$R_E = R_1 + R_5 + \frac{R_1 R_5}{R_2}$$

$$R_F = R_2 + R_5 + \frac{R_2 R_5}{R_1}$$

Dále lze rovněž zjednodušovat pomocí pravidel o sériovém a paralelním řazení komponent. Odpory R_E a R_3 , jakož i odpory R_F a R_4 tvoří paralelní spojení. Potom z veličin vystupujících v původním obvodu můžeme přímo určit pouze napětí a proudy rezistorů R_3 a R_4 , které zůstaly zachovány z původního obvodu a celkový odebíraný proud I ze zdroje.

12. Elektrotechnika 1 – příklad na transfiguraci 2

Dále je možné pomocí Kirchhoffova zákona vyjádřit proudy protékající rezistory R_1 , R_2 a R_5 v původním obvodu a to z proudů rezistorů R_D , R_E a R_F . To znamená, že v obvodu po transfiguraci počítáme proudy vývodů resp. svorek náhradního trojpólu, které musí být shodné s proudy vývodů původního trojpólu R_1 , R_2 a R_5 . Poté vypočítáme napětí na rezistorech R_1 , R_2 a R_5 pomocí Ohmova zákona.

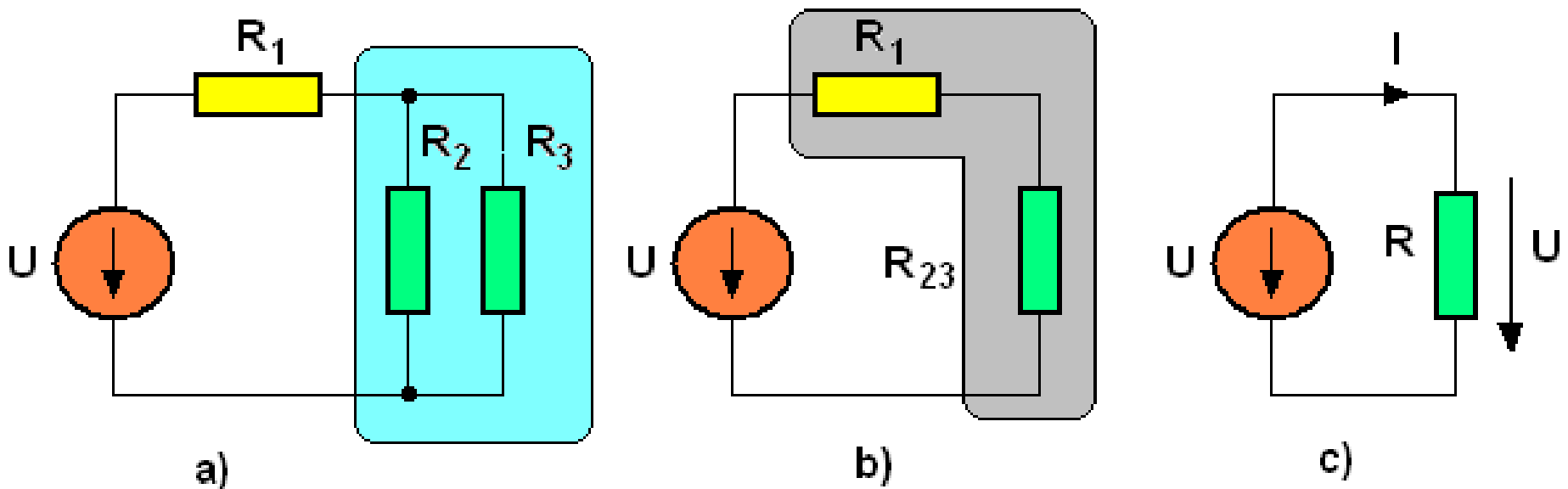
12. Elektrotechnika 1 – metoda postupného zjednodušování

Metoda analýzy se zakládá na postupném nahrazování sériových a paralelních kombinací rezistorů ekvivalentními výslednými prvky.

V každém kroku metody nalezneme v obvodu skupinu (nebo i více skupin) rezistorů spojených sériově nebo paralelně a nahradíme ji rezistorem jedním s příslušnou výslednou hodnotou odporu.

Postupně tak dospíváme ke stále jednoduššímu obvodu.

Jednoduchý ukázkový obvod:



12. Elektrotechnika 1 – metoda postupného zjedn.

V prvním kroku stanovíme ekvivalentní rezistor R_{23}

$$R_{23} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

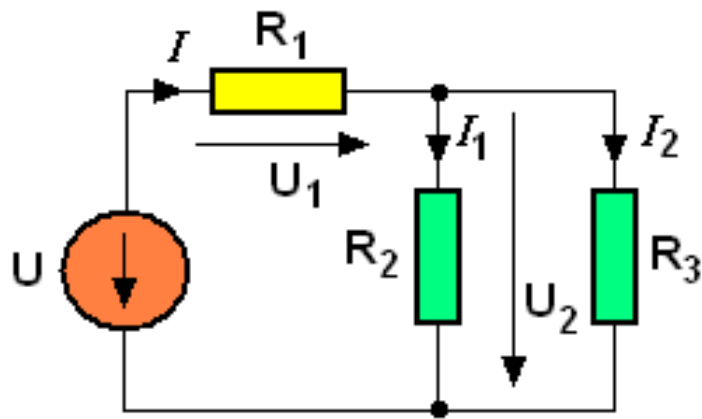
V dalším kroku stanovíme výsledný rezistor jako součet R_1 a R_{23}

$$R = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

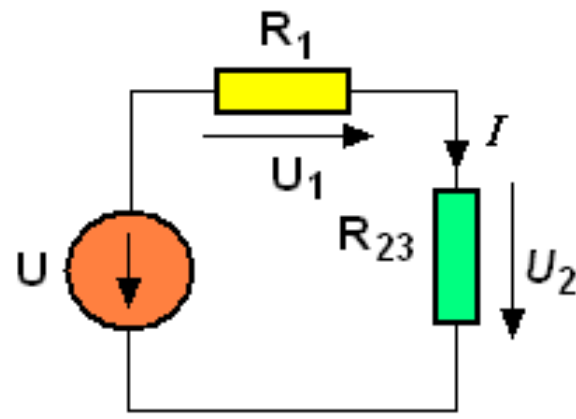
Tímto jsme dostali elementární obvod, který obsahuje nezávislý zdroj napětí U a jediný výsledný rezistor R .

K určení napětí a proudů rezistorů původního obvodu musíme postupovat zpětně po jednotlivých krocích směrem k méně zjednodušeným obvodům.

12. Elektrotechnika 1 – metoda postupného zjedn.



a)



b)

1. Výpočet proudu I
$$I = \frac{U}{R}$$

2. Výpočet dalších veličin – návrat o krok zpět a můžeme vypočítat dílčí napětí na rezistorech R_1 a R_{23} jako úbytky napětí vyvolané průchodem proudu I .

$$U_1 = R_1 I \qquad U_2 = R_{23} I$$

Napětí U_2 na rezistoru R_{23} bylo možné stanovit také z již známého napětí U_1 na rezistoru R_1 a napětí zdroje U pomocí 2. Kirchhoffova zákona, tedy

12. Elektrotechnika 1 – metoda postupného zjedn.

$$U_1 = R_1 I$$

$$U_2 = U - U_1 = U - R_1 I$$

3. Nyní zbývá určit ještě proudy I_2 a I_3 v původně zadaném obvodu. Výpočet můžeme provést buď pomocí Ohmova zákona nebo pomocí Ohmova zákona a 1. zákona Kirchhoffova.

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{U_2}{R_3}$$

nebo

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2}$$

$$I_3 = I - I_2 = I - \frac{U_2}{R_2}$$

K urychlení výpočtů je **možné použít** znalosti o **vztahů pro nezatížený napěťový dělič a pro nezatížený proudový dělič**. Toto je výhodné tehdy, pokud nepotřebujeme znát všechny obvodové veličiny.

12. Elektrotechnika 1 – metoda postupného zjedn.

Např. je-li úkolem určit velikost napětí U_2 na rezistoru R_2 , stačí provést pouze první krok zjednodušení a hledané napětí počítat pomocí vztahu pro napět'ový dělič tvořený rezistory R_1 a R_{23} a není třeba zjišť'ovat výsledný odpor R ani celkový proud I nalájecího zdroje.

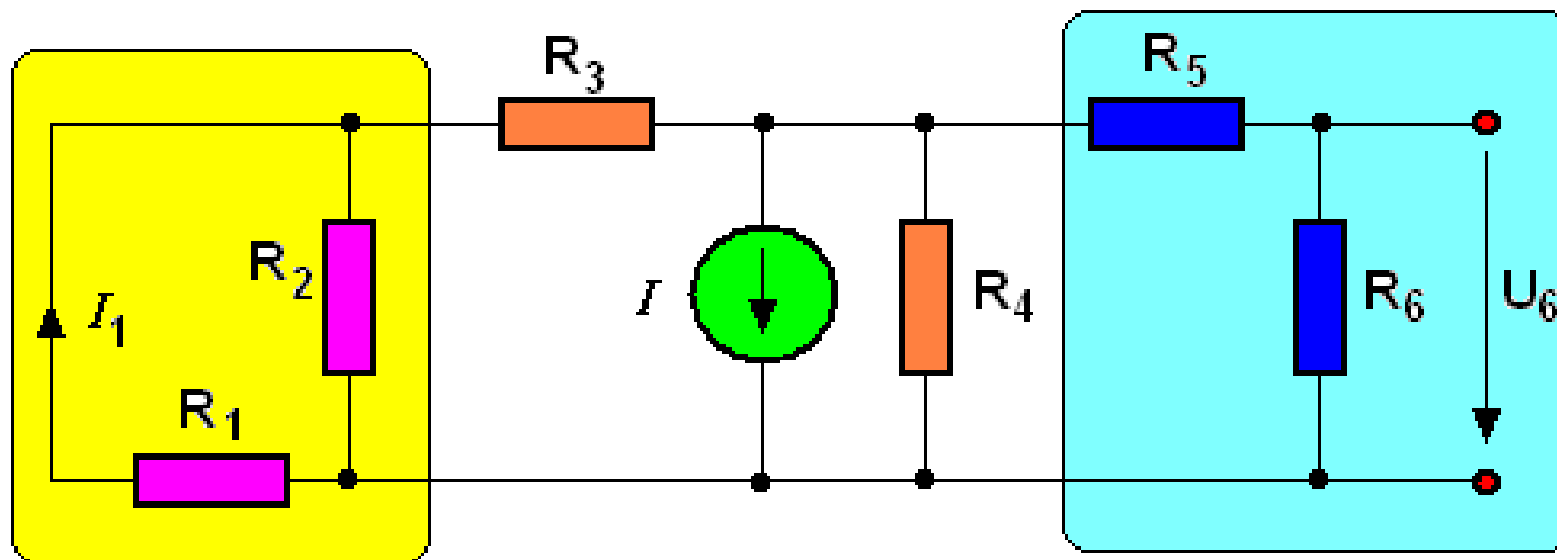
$$U_2 = U \frac{R_{23}}{R_1 + R_{23}}$$

Nebo nás jindy může zajímat jen velikost proudu I_3 . V tom případě provedeme zjednodušení až na konečný elementární obvod a vypočítáme proud I odebíraný ze zdroje U a použijeme vtaħ pro proudový dělič tvořený rezistory R_2 a R_3

$$I_3 = I \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = I \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

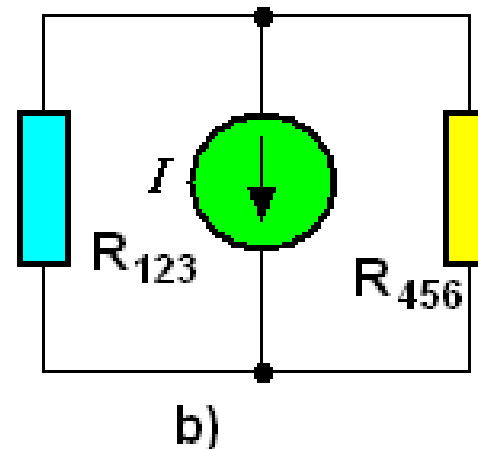
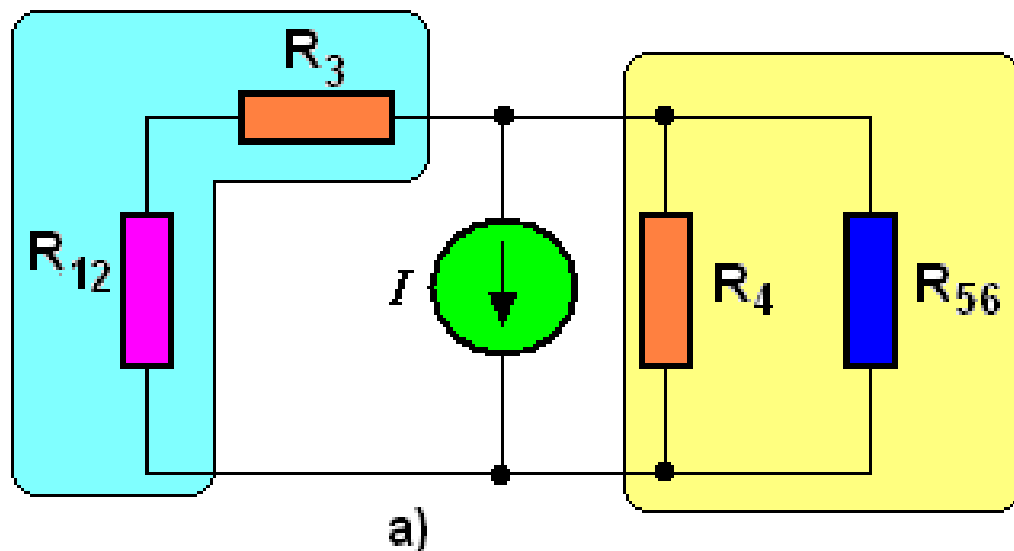
12. Elektrotechnika 1 – příklad na metodu post. zjedn.

Mějme daný složitější obvod, ve kterém je třeba vypočítat proud I_1 a napětí U_6



1) V tomto zadaném obvodu nalezneme hned 2 kombinace, které lze zjednodušit v prvním kroku - R_1 a R_2 v levé části paralelní kombinace a R_5 a R_6 v pravé části zapojení se sériovou kombinací. Na dalším obrázku a) je obvod překreslený.

12. Elektrotechnika 1 – příklad na metodu zjedn. 2



Ekvivalentní rezistor R_{12} a R_{56} je roven

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

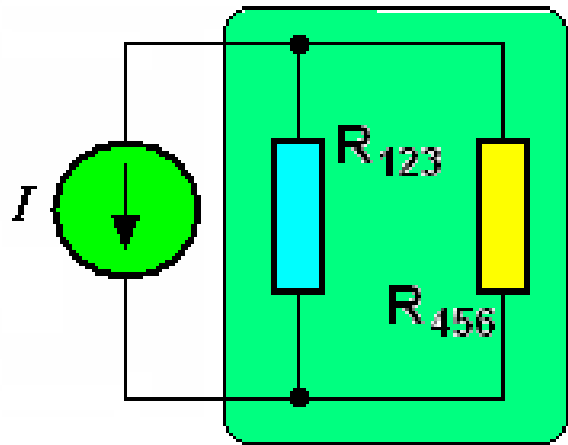
$$R_{56} = R_5 + R_6$$

2) Ve druhém kroku lze opět provést zjednodušení dvou kombinací – sériovou kombinací odporů R_{12} a R_3 rezistorem R_{123} a dále paralelní kombinací R_4 a R_{56} rezistorem R_{456} .

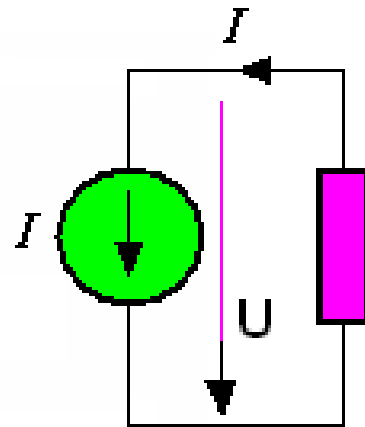
12. Elektrotechnika 1 – příklad na metodu zjedn. 3

$$R_{123} = R_{12} + R_3$$

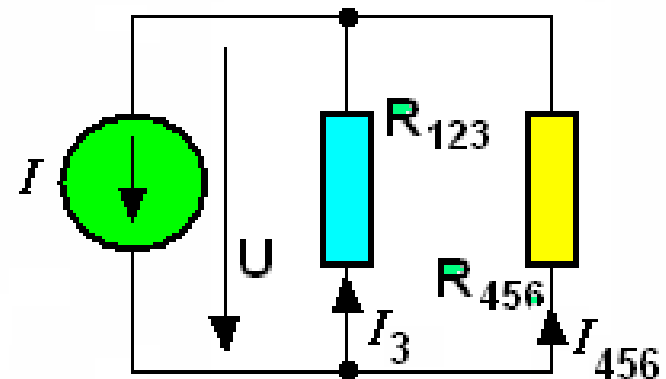
$$R_{456} = \frac{R_4 R_{56}}{R_4 + R_{56}}$$



a)



b)



c)

3) Posledním krokem je výpočet hodnoty rezistoru R

$$R = \frac{R_{123} R_{456}}{R_{123} + R_{456}}$$

$$U = -R I$$

12. Elektrotechnika 1 – příklad na metodu zjedn. 4

Tak jsme obdrželi **výsledný elementární obvod**, ve kterém můžeme začít řešit zpětnou část postupu. Jako první vypočteme napětí U vzniklé průchodem proudu I na rezistoru R . Vzhledem ke zdrojové orientaci (tedy vzájemně opačné) napětí U a proudu I na rezistoru R musíme psát příslušný Ohmův zákon se znaménkem minus.

Alternativně by bylo možné **ve druhém kroku** provést zjednodušení jen sériové kombinace R_{12} a R_3 a paralelně řazené rezistory R_4 a R_{56} ponechat. V posledním kroku pak nahradit 3 paralelní rezistory R_{123} , R_4 a R_{56} rezistorem R

$$R = \left(\frac{1}{R_{123}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{56}} \right)^{-1} = \frac{R_{123} R_4 R_{56}}{R_4 R_{56} + R_{123} R_{56} + R_{123} R_4}$$

Dosazením do těchto vztahů hodnoty původních rezistorů R_1 až R_6 obdrželi bychom stejné výsledky jako v prvním postupu.

12. Elektrotechnika 1 – příklad – výsledné řešení

Výpočet kupř. proudu I_1 a napětí U_6 (mimo jiné veličiny) stanovíme zpětným postupem. Lze použít několika způsobů s různou mírou elegance.

Proud I_1 lze např. vypočítat jako proud jedné větve děliče proudu tvořeného paralelní kombinací R_1 a R_2 , kterým protéká celkový proud I_3 . Proud I_3 bude nutným mezivýsledkem, který musí být vypočítán nejprve. Lze použít vztah pro dělič proudu tvořený rezistory R_{123} a R_{456} , ve kterém se proud I větví na složky I_3 a I_{456} .

$$I_3 = I \frac{R_{456}}{R_{123} + R_{456}}$$

$$I_1 = I_3 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Pro výpočet I_1 nebylo v podstatě nutné zjednodušování až na elementární obvod, ale stačilo by provést prvé dva kroky.

12. Elektrotechnika 1 – příklad – výsledné řešení 2

Hledané napětí U_6 se může vypočítat jako úbytek napětí na rezistoru R_6 , který vznikne průchodem proudu I_5 . Proud I_5 je proudem jedné z větví proudového děliče tvořeného rezistory R_4 a R_{56} . Celkový proud děliče lze určit z proudu zdroje I a již vypočítaného proudu I_3 pomocí Kirchhoffova zákona.

$$I_{456} = I - I_3 \quad I_5 = - I_{456} \frac{R_4}{R_4 + R_{56}} \quad U_6 = R_6 I_5$$